

R E Š E N J A

Klasifikacionog ispita iz Matematike za 2022. godinu:

1. Uprostiti izraz $I = \frac{x^2 - 4xy + 3y^2}{x^2 - y^2}$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2 - 4xy + 3y^2}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 - xy - 3xy + 3y^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{x(x-y) - 3y(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \\ &= \frac{(x-y)(x-3y)}{(x-y)(x+y)} = \boxed{\frac{x-3y}{x+y}}, \text{ za } x \neq \pm y. \end{aligned}$$

2. Rastaviti na faktore polinom $P(x) = 81x^3 + 3$.

$$\begin{aligned} P(x) &= 3[27x^3 + 1] = 3[3^3x^3 + 1^3] = 3[(3x)^3 + 1^3] = \\ &= 3(3x+1)((3x)^2 - 3x \cdot 1 + 1^2) = \boxed{3(3x+1)(9x^2 - 3x + 1)}. \end{aligned}$$

3. Odrediti Najmanji Zajednički Delilac i Najmanji Zajednički Sadržalac za polinome $x^2 - 1$ i $x^2 - 2x + 1$.

Kako je $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ i $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, NZD je $\boxed{x-1}$, a NZS je $\boxed{(x-1)^2(x+1)}$.

4. Rešiti jednačinu $\frac{3x-5}{4} - \frac{4-x}{2} = \frac{9-2x}{6}$.

Ako jednačinu pomnožimo sa 12 dobijamo

$$\begin{aligned} 3(3x-5) - 6(4-x) &= 2(9-2x) \iff 9x - 15 - 24 + 6x = 18 - 4x \\ \iff 19x &= 57 \iff \boxed{x=3}. \end{aligned}$$

5. Rešiti jednačinu $\frac{6x-1}{2+x} = 3$.

$$\text{Za } x \neq -2 \text{ imamo da je } 6x-1 = 6+3x \iff 3x=7 \iff \boxed{x=\frac{7}{3}}.$$

6. Rešiti sistem jednačina $3x + 5y = 1 \wedge 3x - 2y = 8$.

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -1 i dodamo drugoj, dobijamo

$$\begin{aligned} -3x - 5y &= -1 \wedge 3x - 2y = 8 \iff -7y = 7 \wedge 3x - 2y = 8 \\ \iff y &= -1 \wedge 3x + 2 = 8 \iff \boxed{x=2} \wedge \boxed{y=-1}. \end{aligned}$$

7. Rešiti jednačinu $(x-1)^2 - 4 = 0$.

$$\begin{aligned} (x-1)^2 - 4 &= 0 \iff (x-1)^2 - 2^2 = 0 \iff (x-1-2)(x-1+2) = 0 \iff \\ (x-3)(x+1) &= 0 \iff x-3=0 \vee x+1=0 \iff \boxed{x=3} \vee \boxed{x=-1}. \end{aligned}$$

8. Za koju vrednost parametra $m \in \mathbb{R}$ kvadratna jednačina $mx^2 + 6x + 3 = 0$ nema realna rešenja?

Jednačina nema realna rešenja ako i samo ako je $D = b^2 - 4ac < 0$, tj. ako je $D = 6^2 - 4 \cdot m \cdot 3 < 0 \iff 36 - 12m < 0 \iff m > 3 \iff \boxed{m \in (3, +\infty)}$.

9. Rešiti nejednačinu $(x - 2)^2 - 9 > 0$.

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 - 3^2 = (x + 1)(x - 5) > 0 &\iff \\ [(x + 1 < 0 \wedge x - 5 < 0) \vee (x + 1 > 0 \wedge x - 5 > 0)] &\iff \\ [x < -1 \vee x > 5] &\iff \boxed{x \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)}. \end{aligned}$$

10. Rešiti jednačinu $(2022)^{x^2 - 5x + 4} = 1$.

$$(2022)^{x^2 - 5x + 4} = 1 \iff (2022)^{x^2 - 5x + 4} = (2022)^0 \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff \boxed{x = 1} \vee \boxed{x = 4}.$$

11. Rešiti jednačinu $\log_4(3x + 4) = 3$.

Za $3x + 4 > 0 \iff x > -\frac{4}{3}$ je

$$\log_4(3x + 4) = 3 \iff 3x + 4 = 4^3 \iff 3x + 4 = 64 \iff 3x = 60 \iff \boxed{x = 20}.$$

12. Izračunati vrednost izraza $I = \log_2 8 - 2 \log_6 3 - \log_6 4$.

$$\begin{aligned} I &= \log_2 2^3 - \log_6 3^2 - \log_6 4 = 3 \log_2 2 - (\log_6 9 + \log_6 4) = \\ &= 3 \cdot 1 - \log_6(9 \cdot 4) = 3 - \log_6 6^2 = 3 - 2 \log_6 6 = 3 - 2 \cdot 1 = \boxed{1}. \end{aligned}$$

13. Rešiti nejednačinu $\frac{3 - x}{4 - x} > 1$.

$$\begin{aligned} \text{Za } x \neq 4, \text{ je } \frac{3 - x}{4 - x} > 1 &\iff \frac{3 - x}{4 - x} - 1 > 0 \iff \frac{3 - x - 4 + x}{4 - x} > 0 \iff \frac{-1}{4 - x} > 0 \\ &\iff 4 - x < 0 \iff x > 4 \iff \boxed{x \in (4, +\infty)}. \end{aligned}$$

14. Rešiti jednačinu $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

$$4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \iff 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \iff (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0.$$

Smenom $2^x = t$ dobijamo: $t^2 - 6t + 8 = 0 \iff t = 2 \vee t = 4$, pa je:

$$4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \iff 2^x = 2 \vee 2^x = 4 \iff \boxed{x = 1} \vee \boxed{x = 2}.$$

15. Napisati kanonski oblik parabole $y = x^2 - 6x + 8$.

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 1 \cdot \left(x + \frac{-6}{2 \cdot 1} \right)^2 + \frac{4 \cdot 1 \cdot 8 - (-6)^2}{4 \cdot 1} = \boxed{(x - 3)^2 - 1}.$$

Ispitivač: Prof. dr Žarko Popović