R E Š E NJ A

Klasifikacionog ispita iz Matematike za 2020. godinu:

1. Uprostiti izraz $I = \dfrac{x^2-4xy+3y^2}{x^2-y^2}$.

$$I = \frac{x^2-4xy+3y^2}{x^2-y^2} = \frac{x^2-xy-3xy+3y^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{x(x-y)-3y(x-y)}{(x-y)(x+y)} =$$
$$= \frac{(x-y)(x-3y)}{(x-y)(x+y)} = \boxed{\frac{x-3y}{x+y}}, \text{ za } x \neq \pm y.$$

2. Rastaviti na faktore polinom $P(x) = 81x^3 - 3$.

$$P(x) = 3[27x^3-1] = 3[3^3x^3-1^3] = 3[(3x)^3-1^3] =$$
$$= 3(3x-1)((3x)^2+3x+1) = \boxed{3(3x-1)(9x^2+3x+1)}\ .$$

3. Odrediti Najmanji Zajednički Delilac za polinome x^2-1 i x^2-2x+1.

Kako je $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ i $x^2-2x+1 = (x-1)^2$, NZD je $\boxed{x-1}$.

4. Rešiti jednačinu $2x + \dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{5x-2}{3} = 2$.

Ako jednačinu pomnožimo sa 6 dobijamo

$$12x + 3(3x-1) - 2(5x-2) = 12 \iff 12x + 9x - 3 - 10x + 4 = 12$$
$$\iff 11x = 11 \iff \boxed{x=1}\ .$$

5. Rešiti jednačinu $\dfrac{6x-1}{2+x} = 3$.

Za $x \neq -2$ imamo da je $6x - 1 = 6 + 3x \iff 3x = 7 \iff \boxed{x = \dfrac{7}{3}}$.

6. Rešiti sistem jednačina $3x + 5y = 1 \ \wedge\ 3x - 2y = 8$.

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -1 i dodamo drugoj, dobijamo

$$-3x - 5y = -1 \ \wedge\ 3x - 2y = 8 \iff -7y = 7 \ \wedge\ 3x - 2y = 8$$
$$\iff y = -1 \ \wedge\ 3x + 2 = 8 \iff \boxed{x=2} \wedge \boxed{y=-1}\ .$$

7. Rešiti jednačinu $(x-2)^2 - 9 = 0$.

$$(x-2)^2 - 9 = 0 \iff (x-2)^2 - 3^2 = 0 \iff (x-2-3)(x-2+3) = 0 \iff$$
$$(x-5)(x+1) = 0 \iff x-5 = 0 \vee x+1 = 0 \iff \boxed{x=5} \vee \boxed{x=-1}\ .$$

8. Za koju vrednost parametra $m \in \mathbb{R}$ kvadratna jednačina $x^2 + 6x + m = 0$ ima realna rešenja?

Jednačina ima realna rešenja ako i samo ako je $D = b^2 - 4ac \geq 0$, tj. ako je

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot m \geq 0 \iff 36 - 4m \geq 0 \iff \boxed{m \leq 9}.$$

9. Rešiti nejednačinu $(x-1)^2 - 4 > 0$.

$$(x-1)^2 - 2^2 = (x+1)(x-3) > 0 \iff$$
$$[(x+1 < 0 \wedge x - 3 < 0) \vee (x + 1 > 0 \wedge x - 3 > 0)] \iff$$
$$[x < -1 \vee x > 3] \iff \boxed{x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)}.$$

10. Rešiti jednačinu $(2020)^{x^2-5x+4} = 1$.

$(2020)^{x^2-5x+4} = 1 \iff (2020)^{x^2-5x+4} = (2020)^0 \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff$ $\boxed{x = 1} \vee \boxed{x = 4}$.

11. Rešiti jednačinu $\log_4(3x+4) = 3$.

Za $3x + 4 > 0 \iff x > -\frac{4}{3}$ je

$$\log_4(3x+4) = 3 \iff 3x + 4 = 4^3 \iff 3x + 4 = 64 \iff 3x = 60 \iff \boxed{x = 20}.$$

12. Izračunati vrednost izraza $I = \log_6 2 + \log_6 3$.

$$I = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6(2 \cdot 3) = \log_6 6 = \boxed{1}.$$

13. Rešiti nejednačinu $\dfrac{x-1}{x+2} < 1$.

Za $x \neq -2$, je $\dfrac{x-1}{x+2} < 1 \iff \dfrac{x-1}{x+2} - 1 < 0 \iff \dfrac{x-1-x-2}{x+2} < 0 \iff \dfrac{-3}{x+2} < 0$

$$\iff x + 2 > 0 \iff x > -2 \iff \boxed{x \in (-2, +\infty)}.$$

14. Rešiti jednačinu $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \iff 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \iff (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0.$

Smenom $2^x = t$ dobijamo: $t^2 - 5t + 4 = 0 \iff t = 1 \vee t = 4$, pa je:

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \iff 2^x = 1 \vee 2^x = 4 \iff \boxed{x = 0} \vee \boxed{x = 2}.$$

15. Napisati kanonski oblik parabole $y = x^2 - 2x + 1$.

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 1 \cdot \left(x + \frac{-2}{2 \cdot 1}\right)^2 + \frac{4 \cdot 1 \cdot 1 - (-2)^2}{4 \cdot 1} = \boxed{(x-1)^2}.$$

Ispitivač: Prof. dr Žarko Popović